Soluções trigonométricas de equações polinomiais de grau 3

Sandro Marcos Guzzo - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Campus de Cascavel)
Sandra Maria Tieppo - Universidade Federal do Paraná (Setor Palotina)

(*Recebido em 16/09/2022. Aceito em 25/11/2022. Publicado em 22/12/2022*)

Resumo: No início do século XVI, alguns matemáticos, fizeram esforços para encontrar uma fórmula para a resolução de equações polinomiais de grau 3. A ideia era obter uma fórmula que permitisse encontrar (pelo menos) uma raiz da equação manipulando apenas os coeficientes da própria equação. O objetivo deste texto é mostrar como podemos determinar (pelo menos) uma raiz de uma equação polinomial de grau 3 usando expressões trigonométricas.

Palavras-chave: Soluções trigonométricas; Equações polinomiais.

1 Introdução

Desde a descoberta da fórmula que resolve a equação do 2° grau, os matemáticos começaram a pensar em formas de resolver as equações de grau 3

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1}$$

com a, b, c e d coeficientes reais (ou mesmo complexos) e $a \neq 0$.

No início do século XVI, matemáticos italianos, fizeram esforços para encontrar uma fórmula para a resolução de certas equações do terceiro grau. Eles consideraram a equação de grau 3 sem o termo quadrático,

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2}$$

e encontraram uma raiz da forma

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

que ficou conhecida como fórmula de Cardano. O leitor interessado nos detalhes de como esta fórmula é obtida pode consultar Lima (2021).

Ludovico Ferrari, professor da Universidade de Bolonha e discípulo de Cardano, foi quem desenvolveu um método que permite eliminar o termo quadrático da equação original (1) transformando-a em uma equação sem o termo quadrático na forma (2). A técnica de Ferrari consiste em aplicar a mudança de variáveis $x = y - \frac{b}{3a}$ na equação (1), obtendo

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0,$$

e portanto

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

Dividindo agora toda a equação por $a \neq 0$, e designando $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ e $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$, recaimos em uma equação de grau 3 sem o termo quadrático, na forma de (2) (na variável y). A equação (2) é conhecida como equação reduzida da equação (1). Assim, se r é raiz da equação (2), então $x = r - \frac{b}{3a}$ é raiz de (1), desde que a, b, c, d, p e q satisfaçam as relações dadas.

Quando estudamos trigonometria, tanto a circular quanto a hiperbólica, nos deparamos com algumas expressões trigonométricas que envolvem potências de grau 3 das funções trigonométricas sem a presença de termos quadráticos. São as igualdades

$$4\cos^3 u - 3\cos u - \cos(3u) = 0, \tag{3}$$

$$4\,\mathrm{sen}^3\, u - 3\,\mathrm{sen}\, u + \mathrm{sen}(3u) = 0, \tag{4}$$

$$4\cosh^3 u - 3\cosh u - \cosh(3u) = 0, \tag{5}$$

$$4\,\mathrm{senh}^3\, u + 3\,\mathrm{senh}\, u - \mathrm{senh}(3u) = 0, \tag{6}$$

válidas para qualquer $u \in \mathbb{R}$. Estas identidades são facilmente obtidas a partir das chamadas fórmulas do arco triplo

$$\cos(3u) = 4\cos^3 u - 3\cos u,$$

$$\mathrm{sen}(3u) = -4\,\mathrm{sen}^3\, u + 3\,\mathrm{sen}\, u,$$

$$\cosh(3u) = 4\cosh^3 u - 3\cosh u,$$

$$\mathrm{senh}(3u) = 4\,\mathrm{senh}^3\, u + 3\,\mathrm{senh}\, u.$$

Para o leitor que deseja mais informações sobre trigonometria, em especial a trigonometria hiperbólica, recomendamos Guzzo (2021).

O objetivo deste trabalho é partir da equação (2), e obter (pelo menos) uma raiz desta equação, usando as expressões trigonométricas apresentadas. Com pelo menos uma raiz encontrada, podemos reduzir o grau do polinômio e usar a fórmula de Bháskara para determinar as outras duas raízes. Em resumo, o que pretendemos é obter (pelo menos) uma raiz da equação

$$x^3 + px + q = 0.$$

com $p, q \in \mathbb{R} - \{0\}$. Estamos considerando $p \neq 0$ e $q \neq 0$ pois caso $p = 0$ ou $q = 0$, a obtenção de uma raiz da equação não exigirá técnicas elaboradas. Se $p = 0$, a equação se reduz a $x^3 + q = 0$ e $x = \sqrt[3]{-q}$ é uma raiz. Se $q = 0$ então a equação se reduz a $x^3 + px = 0$ e $x = 0$ é uma raiz.

2 Discriminante de uma equação de grau 3

É conhecido que para uma equação de grau 2 na forma $ax^2 + bx + c = 0$ o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ pode ser utilizado para decidir o comportamento das duas raízes antes mesmo de determinar estas raízes. A análise da nulidade ou do sinal de Δ nos indica a natureza das raízes. O objetivo desta seção é mostrar como esta ideia pode ser levada também para equações polinomiais de grau 3 que são o alvo do nosso estudo.

Consideremos uma equação polinomial geral de grau 3 na forma (1), isto é,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. De acordo com o Teorema Fundamental da Algebra, sabemos que esta equação possui três raízes, reais ou complexas, distintas ou não. Designemos estas raízes por r_1, r_2 e r_3. Podemos fazer uma análise do comportamento destas raízes analisando a expressão

$$\Delta = (r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2, \tag{7}$$

que é conhecida como discriminante da equação cúbica (1).

Observe que, de forma imediata, duas destas raízes coincidem se e somente se $\Delta = 0$.

Vamos verificar que uma destas raízes é um número complexo (não real), se e somente se, $\Delta < 0$. Suponha então que uma destas raízes é complexa não real. Como é de conhecimento da teoria geral das equações polinomiais com coeficientes reais, obrigatoriamente o complexo conjugado desta raiz é uma outra raiz da equação. Por este motivo, apenas duas destas raízes podem ser complexas não reais. Vamos supor então, sem perda de generalidade, que $r_1 \in \mathbb{R}$ e $r_3 = \overline{r_2} \notin \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\Delta &= (r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2 \\
&= (r_1 - r_2)^2(r_1 - \overline{r_2})^2(r_2 - \overline{r_2})^2 \\
&= \left((r_1 - r_2)(r_1 - \overline{r_2})\right)^2 (r_2 - \overline{r_2})^2 \\
&= \left(r_1^2 - r_1\overline{r_2} - r_1 r_2 + r_2\overline{r_2})\right)^2 (2Im(r_2)i)^2 \\
&= \left(r_1^2 - r_1(r_2 + \overline{r_2}) + |r_2|^2\right)^2 (2Im(r_2)i)^2 \\
&= \left(r_1^2 - r_1 2Re(r_2) + |r_2|^2\right)^2 (2Im(r_2)i)^2 \\
&= \left(r_1^2 - r_1 2Re(r_2) + (Re(r_2))^2 + (Im(r_2))^2\right)^2 (2Im(r_2)i)^2 \\
&= \left((r_1 - Re(r_2))^2 + (Im(r_2))^2\right)^2 (2Im(r_2)i)^2,
\end{aligned}$$

sendo que $Re(r_2)$ e $Im(r_2)$ referem-se respectivamente às partes real e imaginária do número complexo r_2.

Basta ver agora que $Im(r_2) \neq 0$ pois r_2 é um número complexo não real e desta forma $(r_1 - Re(r_2))^2 + Im(r_2)^2 > 0$ e $(2Im(r_2)i)^2 < 0$ já que $i^2 = -1$. Segue que se alguma das raízes da equação (1) for complexa, então $\Delta < 0$. Claramente o recíproco é verdadeiro, isto é, se $\Delta < 0$ então obrigatoriamente algum dos fatores do produto é negativo. Mas como estes fatores são quadrados, obrigatoriamente um deles é um número complexo (mais ainda, um imaginário puro).

Por exclusão com os casos $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$ temos então que as raízes da equação (1) são reais e distintas se e somente se $\Delta > 0$.

Esta análise do discriminante da equação é importante, mas o leitor deve ter percebido que esta forma de apresentação do discriminante torna-o sem muita utilidade. Isto porque para obter este discriminante precisamos conhecer explicitamente as três raízes da equação e desta forma a análise do discriminante já seria desnecessária. Podemos reescrever a expressão do discriminante em termos dos coeficientes a, b, c e d da equação. Isto permitiria conhecer o comportamento das raízes antes de determiná-las. Para esta tarefa usamos as Relações de Girard, que estabelecem uma relação entre os coeficientes a, b, c e d e as raízes r_1, r_2, e r_3 da equação. Para a equação de grau 3 tais relações são dadas por

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \Delta &= ((r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_3))^2 \\ &= \left(r_1^2r_2 - r_1r_2^2 + r_2^2r_3 - r_1^2r_3 + r_1r_3^2 - r_2r_3^2\right)^2 \\ &= (r_1^4r_2^2 + r_1^2r_2^4 + r_2^4r_3^2 + r_1^4r_3^2 + r_1^2r_3^4 + r_2^2r_3^4) - 6(r_1r_2r_3)^2 \\ &\qquad + 2(r_1^2r_2^3r_3 + r_1^3r_2r_3^2 + r_1^3r_2^2r_3 + r_1r_2^3r_3^2 + r_1r_2^2r_3^3 + r_1^2r_2r_3^3) \\ &\qquad - 2(r_1^4r_2r_3 + r_1r_2^4r_3 + r_1r_2r_3^4) - 2(r_1^3r_2^3 + r_1^3r_3^3 + r_2^3r_3^3). \end{aligned} \tag{8}$$

Mas notemos que

$$\begin{aligned} &(r_1 + r_2 + r_3)(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) \\ &\qquad = (r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_1^2r_3 + r_1r_3^2 + r_2^2r_3 + r_2r_3^2) + 3(r_1r_2r_3) \end{aligned}$$

donde podemos escrever

$$(r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_1^2r_3 + r_1r_3^2 + r_2^2r_3 + r_2r_3^2) = 3\frac{d}{a} - \frac{b}{a}\frac{c}{a} = \frac{3ad - bc}{a^2}. \tag{9}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da identidade (9) podemos também obter

$$\begin{aligned} \left(\frac{3ad - bc}{a^2}\right)^2 &= (r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_1^2r_3 + r_1r_3^2 + r_2^2r_3 + r_2r_3^2)^2 \\ &= (r_1^4r_2^2 + r_1^2r_2^4 + r_2^4r_3^2 + r_1^4r_3^2 + r_1^2r_3^4 + r_2^2r_3^4) + 6(r_1r_2r_3)^2 \\ &\qquad + 2(r_1^3r_2r_3^2 + r_1^3r_2^2r_3 + r_1^2r_2^3r_3 + r_1r_2^3r_3^2 + r_1^2r_2r_3^3 + r_1r_2^2r_3^3) \\ &\qquad + 2(r_1^4r_2r_3 + r_1r_2^4r_3 + r_1r_2r_3^4) + 2(r_1^3r_2^3 + r_1^3r_3^3 + r_2^3r_3^3). \end{aligned}$$

Desta última igualdade obtemos portanto

$$\begin{aligned} &(r_1^4r_2^2 + r_1^2r_2^4 + r_2^4r_3^2 + r_1^4r_3^2 + r_1^2r_3^4 + r_2^2r_3^4) \\ &\qquad + 2(r_1^3r_2r_3^2 + r_1^3r_2^2r_3 + r_1^2r_2^3r_3 + r_1r_2^3r_3^2 + r_1^2r_2r_3^3 + r_1r_2^2r_3^3) \\ &= \left(\frac{3ad - bc}{a^2}\right)^2 - 6(r_1r_2r_3)^2 - 2(r_1^4r_2r_3 + r_1r_2^4r_3 + r_1r_2r_3^4) - 2(r_1^3r_2^3 + r_1^3r_3^3 + r_2^3r_3^3). \end{aligned} \tag{10}$$

Substituindo (10) em (8) obtemos

$$\Delta = \left(\frac{3ad - bc}{a^2}\right)^2 - 12(r_1r_2r_3)^2 - 4(r_1^4r_2r_3 + r_1r_2^4r_3 + r_1r_2r_3^4) - 4(r_1^3r_2^3 + r_1^3r_3^3 + r_2^3r_3^3). \quad (11)$$

Para a penúltima parcela da igualdade (11) usamos

$$(r_1 + r_2 + r_3)^3 = (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) + 3(r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_1^2r_3 + r_1r_3^2 + r_2^2r_3 + r_2r_3^2) + 6r_1r_2r_3,$$

para escrever

$$\begin{aligned}(r_1^4r_2r_3 &+ r_1r_2^4r_3 + r_1r_2r_3^4) \\ &= r_1r_2r_3(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) \\ &= r_1r_2r_3\left((r_1 + r_2 + r_3)^3 - 3(r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_1^2r_3 + r_1r_3^3 + r_2^2r_3 + r_2r_3^2) - 6r_1r_2r_3\right)\end{aligned}$$

e usando (9) conseguimos

$$(r_1^4r_2r_3 + r_1r_2^4r_3 + r_1r_2r_3^4) = -\frac{d}{a}\left(-\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{3ad - bc}{a^2} + 6\frac{d}{a}\right) = \frac{b^3d + 3a^2d^2 - 3abcd}{a^4}. \quad (12)$$

Já para a última parcela da igualdade (11) podemos escrever

$$\begin{aligned}(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)^3 &= r_1^3r_2^3 + r_1^3r_3^3 + r_2^3r_3^3 + 6r_1^2r_2^2r_3^2 \\ &\quad + 3(r_1^2r_2^3r_3 + r_1^3r_2^2r_3 + r_1r_2^3r_3^2 + r_1r_2^2r_3^3 + r_1^3r_2r_3^2 + r_1^2r_2r_3^3) \\ &= (r_1^3r_2^3 + r_1^3r_3^3 + r_2^3r_3^3) + 6(r_1r_2r_3)^2 \\ &\quad + 3(r_1r_2r_3)(r_1r_2^2 + r_1^2r_2 + r_2^2r_3 + r_2r_3^2 + r_1^2r_3 + r_1r_3^2),\end{aligned}$$

e usando (9) obtemos

$$\begin{aligned}(r_1^3r_2^3 + r_1^3r_3^3 + r_2^3r_3^3) &= (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)^3 - 6(r_1r_2r_3)^2 \\ &\quad - 3(r_1^2r_2^3r_3 + r_1^3r_2^2r_3 + r_1r_2^3r_3^2 + r_1r_2^2r_3^3 + r_1^3r_2r_3^2 + r_1^2r_2r_3^3) \\ &= \frac{c^3}{a^3} - 6\frac{d^2}{a^2} + \frac{3d}{a}\frac{3ad - bc}{a^2} = \frac{c^3 + 3ad^2 - 3bcd}{a^3}. \quad (13)\end{aligned}$$

Finalmente juntando as estimativas (12) e (13) em (11) obtemos

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{3ad - bc}{a^2}\right)^2 - 12\frac{d^2}{a^2} - 4\frac{b^3d + 3a^2d^2 - 3abcd}{a^4} - 4\frac{c^3 + 3ad^2 - 3bcd}{a^3} \\ &= \frac{9a^2d^2 - 6adbc + b^2c^2}{a^4} - \frac{12d^2}{a^2} + \frac{12abcd - 4b^3d - 12a^2d^2}{a^4} + \frac{12bcd - 4c^3 - 12ad^2}{a^3} \\ &= \frac{9a^2d^2 - 6adbc + b^2c^2 - 12d^2a^2 + 12abcd - 4b^3d - 12a^2d^2 + 12abcd - 4ac^3 - 12a^2d^2}{a^4} \\ &= \frac{b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd}{a^4}.\end{aligned}$$

Já que a análise de sinal, bem como a nulidade de Δ, fica a cargo do numerador da fração, é comum apresentar o discriminante já na forma que interessa

$$\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd.$$

Lembremos que o objetivo deste trabalho é obter (pelo menos) uma raiz da equação do terceiro grau reduzida na forma $x^3+px+q=0$, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$. Desta forma o discriminante desta equação é $\Delta = -4p^3 - 27q^2$, e conforme os resultados desta seção, temos os seguintes casos:

i) $\Delta = -4p^3 - 27q^2 > 0$, se e somente se, as três raízes da equação são reais e distintas;

ii) $\Delta = -4p^3 - 27q^2 = 0$, se e somente se, a equação possui raízes repetidas. Neste caso, obrigatoriamente as raízes são reais, sendo pelo menos uma delas com multiplicidade;

iii) $\Delta = -4p^3 - 27q^2 < 0$, se e somente se, a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

3 Raízes trigonométricas

Estamos agora prontos para o objetivo principal deste trabalho, a obtenção de soluções da equação polinomial de grau 3, usando expressões trigonométricas. Dividiremos o estudo nos casos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Primeiro caso: (Três raízes reais e distintas) Vamos agora encontrar uma solução (raiz) da equação $x^3 + px + q = 0$, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$, para o caso $\Delta = -4p^3 - 27q^2 > 0$. Neste caso, como visto anteriormente, sabemos que a equação cúbica possuirá 3 raízes reais e distintas. Mas notemos ainda que $\Delta = -4p^3 - 27q^2 > 0$ exigirá $-4p^3 > 27q^2$ e portanto $p < 0$.

Supondo então $\Delta = -4p^3 - 27q^2 > 0$ (consequentemente $p < 0$) e $q \neq 0$, começamos fazendo a substituição $x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos u$ na equação (2), e com isso obtemos

$$\frac{-8p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos^3 u + 2p\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos u + q = 0,$$

e reorganizando os termos

$$\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(4\cos^3 u - 3\cos u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) = 0.$$

Como $p \neq 0$ então resta que

$$4\cos^3 u - 3\cos u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} = 0$$

e comparando esta equação com (3), vemos que esta equação torna-se verdadeira para todos os valores de u que satisfazem $\cos(3u) = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$.

Observe que como $-4p^3 - 27q^2 > 0$, então $27q^2 < -4p^3$, donde $9q^2 < 4p^2\frac{-p}{3}$, e também $3|q| < 2|p|\sqrt{\frac{-p}{3}}$. Isto garante que $\left|\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right| < 1$ e nos possibilita determinar o valor procurado para u.

Nestes termos, queremos encontrar u de forma que $\cos(3u) = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$, e então, temos que

$$3u = \cos^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + 2k\pi, \qquad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z},$$

ou ainda

$$u = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}, \qquad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Voltando com este u em $x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos u$, obtemos

$$x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notemos ainda que não há a necessidade de que k assuma todos os valores inteiros. Basta tomar $k \in \{0, 1, 2\}$ pois todos os demais valores de k inteiros ocasionarão a repetição do valor obtido com algum destes 3 valores de k. Segue que

$$x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad \text{para} \quad k \in \{0, 1, 2\}, \tag{14}$$

são as 3 raízes (reais e distintas) procuradas da equação $x^3 + px + q = 0$, quando $\Delta = -4p^3 - 27q^2 > 0$.

O leitor atento dirá que para este mesmo caso, também poderíamos considerar no início do processo a substituição $x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{sen} u$. De fato, esta substituição traria

$$\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(4\operatorname{sen}^3 u - 3\operatorname{sen} u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) = 0.$$

e consequentemente

$$4\operatorname{sen}^3 u - 3\operatorname{sen} u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} = 0.$$

Comparando agora esta equação com (4), ela torna-se verdadeira para todo $u \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\operatorname{sen}(3u) = -\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$. Novamente precisamos da condição $\left|\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right| < 1$ e como visto anteriormente, isto fica garantido da condição $-4p^3 - 27q^2 > 0$. Assim queremos determinar u de forma que $\operatorname{sen}(3u) = -\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$, o que nos trará de forma equivalente ao anterior

$$u = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}, \qquad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

e

$$x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad \text{para} \quad k \in \{0, 1, 2\}. \tag{15}$$

Não é difícil provar que os valores de x obtidos pelas expressões (14) e (15) coincidem, em virtude das identidades trigonométricas $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \operatorname{sen} u$, $\operatorname{sen}^{-1}(-u) = -\operatorname{sen}^{-1} u$ e $\cos^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} u$, válidas para todo $u \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos\left(-\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) - \frac{2k\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) - \frac{2k\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) - \frac{2k\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) - \frac{2(k+1)\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) - \frac{2(k+1)\pi}{3}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2(k+1)\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Mas lembremos que $k \in \{0,1,2\}$ e portanto $(k+1) \in \{1,2,3\}$ e como o caso $(k+1) = 3$ coincide com o caso $k+1=0$ podemos claramente reorganizar $(k+1) \in \{0,1,2\}$ e não faz diferença escrever $k+1$ ou k.

Portanto as raízes de $x^3+px+q=0$, quando $-4p^3-27q^2>0$, são

$$\begin{aligned}
x &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad \text{para} \quad k \in \{0,1,2\}\\
&= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad \text{para} \quad k \in \{0,1,2\}.
\end{aligned}$$

Segundo caso: (Três raízes reais com multiplicidade) Não trataremos extensivamente este caso, pois o caso anterior pode ser adaptado para contemplar também o caso em que a equação (2) admite raízes reais com multiplicidade.

Olharemos rapidamente para o caso anterior considerando que $\Delta = -4p^3 - 27q^2 = 0$, e portanto $-4p^3 = 27q^2$.

Se $p = q = 0$, então não há o que analisar pois neste caso a equação reduzida $x^3+px+q = 0$ fica $x^3 = 0$ e a raíz $r = 0$ é a única raiz com multiplicidade 3.

Vamos então supor p e q não nulos satisfazendo $-4p^3-27q^2=0$ e portanto $-4p^3 = 27q^2$ o que obriga também $p<0$. Neste caso temos que $\frac{27q^2}{-4p^3} = 1$, e portanto $\left|\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right| = 1$.

A substituição $x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos u$ ainda pode ser feita na equação (2), e nos conduz a

$$4\cos^3 u - 3\cos u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} = 0$$

e da comparação com a identidade (3), obtemos $\cos(3u) = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} = \pm 1$.

Levando em conta que $p<0$, se $q<0$, então teremos $\cos(3u) = 1$ portanto $3u = 0 + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, se $q>0$ então teremos $\cos(3u) = -1$ e $3u = \pi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Lembremos que basta considerar em ambos os casos $k \in \{0,1,2\}$.

Sendo assim, as raízes da equação reduzida serão dadas por

$$x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\theta_0 + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad \text{para} \quad k \in \{0,1,2\}$$

sendo que $\theta_0 = 0$ quando $q < 0$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ quando $q > 0$. Podemos observar que quando $q < 0$ (ou quando $\theta_0 = 0$) duas raízes coincidirão para $k = 1$ e $k = 2$ já que $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{4\pi}{3})$. Também quando $q > 0$ (ou quando $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$) duas raízes coincidirão para $k = 0$ e $k = 2$, já que, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{5\pi}{3})$.

De forma análoga, a substituição $x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{sen} u$ traz

$$4\operatorname{sen}^3 u - 3\operatorname{sen} u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} = 0,$$

e pela comparação com a identidade (4), obtemos $\operatorname{sen}(3u) = -\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} = \pm 1$.

O sinal de q novamente nos dirá o caminho a tomar. Se $q < 0$, então teremos $\operatorname{sen}(3u) = -1$ e assim $3u = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Se $q > 0$, então teremos $\operatorname{sen}(3u) = 1$ e assim $3u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Sabemos que basta considerar $k \in \{0,1,2\}$ e desta forma, as raízes da equação reduzida podem também ser dadas por

$$x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{sen}\left(\theta_0 + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad \text{para} \quad k \in \{0,1,2\},$$

sendo que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ se $q < 0$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ se $q > 0$. Naturalmente quando $q < 0$, duas raízes coindirão quando $k = 1$ e $k = 2$ já que $\operatorname{sen}(\frac{7\pi}{6}) = \operatorname{sen}(\frac{11\pi}{6})$. Também quando $q > 0$ duas raízes coincidirão quando $k = 0$ e $k = 1$ já que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \operatorname{sen}(\frac{5\pi}{6})$.

Terceiro caso: (Uma única raiz real) Para este caso queremos obter (pelo menos) uma solução da equação (2), com $p \neq 0$ e $q \neq 0$, considerando $-4p^3 - 27q^2 < 0$.

Neste caso teremos então que $-4p^3 < 27q^2$. Note que se $p > 0$ então esta condição sempre será cumprida, Mas podemos ainda ter valores de $p < 0$ satisfazendo $-4p^3 < 27q^2$. Por isso, vamos separar os casos em que $p > 0$ e $p < 0$. Como q está elevado ao quadrado, não conseguimos estimar se $q > 0$ ou se $q < 0$, e por isso, vamos utilizar $|q|$ nos cálculos.

Vamos considerar primeiro o caso um pouco mais restritivo, isto é, o caso em que $\Delta = -4p^3 - 27q^2 < 0$ com $p < 0$ e $q \neq 0$. Fazemos a substituição $x = -2\frac{q}{|q|}\sqrt{\frac{-p}{3}}\cosh u$, e obtemos

$$\frac{q^2}{|q|^2}\frac{8p}{3}\frac{q}{|q|}\sqrt{\frac{-p}{3}}\cosh^3 u - 2p\frac{q}{|q|}\sqrt{\frac{-p}{3}}\cosh u + q = 0.$$

Agora como $\frac{q^2}{|q|^2} = 1$ qualquer que seja o valor de $q \neq 0$, então reorganizando os termos obtemos

$$\frac{2p}{3}\frac{q}{|q|}\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(4\cosh^3 u - 3\cosh u + \frac{3|q|}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) = 0.$$

Novamente, como $p \neq 0$ então

$$4\cosh^3 u - 3\cosh u + \frac{3|q|}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} = 0$$

e comparando esta equação agora com a identidade (5), vemos que ela torna-se verdadeira se $\cosh(3u) = -\frac{3|q|}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$.

Notemos agora que como estamos considerando agora o caso $-4p^3 - 27q^2 < 0$, isto é $-4p^3 < 27q^2$, e como com $p < 0$, então $\frac{27q^2}{-4p^3} > 1$. Segue que $-\frac{3|q|}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} > 1$ e portanto é possível determinar o valor procurado de u.

Nestes termos temos que

$$3u = \cosh^{-1}\left(-\frac{3|q|}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right),$$

ou ainda

$$u = \frac{1}{3}\cosh^{-1}\left(-\frac{3|q|}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right).$$

Voltando com este u em $x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cosh u$, obtemos

$$x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}\left(-\frac{3|q|}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right)\right),$$

sendo esta a única raiz real da equação (2) quando $-4p^3 - 27q^2 < 0$ com $p < 0$.

Resta agora considerar a equação $x^3 + px + q = 0$ com $\Delta = -4p^3 - 27q^2 < 0$ para o caso $p > 0$. Na verdade, basta considerar que $p > 0$ e a desigualdade $-4p^3 < 27q^2$ ocorrerá obrigatoriamente, garantindo que $\Delta = -4p^3 - 27q^2 < 0$. Isto ainda significa que a equação cúbica possui apenas uma raiz real.

Considerando então a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ com $p > 0$ e $q \neq 0$, usamos a substituição $x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{senh} u$, e obtemos a equação

$$-\frac{8p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{senh}^3 u - 2p\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{senh} u + q = 0,$$

que após reorganização dos termos nos conduz a

$$\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(4\operatorname{senh}^3 u + 3\operatorname{senh} u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right) = 0.$$

Novamente, como $p \neq 0$ então

$$4\operatorname{senh}^3 u + 3\operatorname{senh} u - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} = 0$$

e comparando com a identidade (6), queremos encontrar u de forma que $\operatorname{senh}(3u) = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$.

Levando em conta a bijetividade da função seno hiperbólico de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, temos que

$$3u = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right),$$

donde

$$u = \frac{1}{3} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{3}{p}} \right).$$

Voltando para a variável original x, levamos este u em $x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{senh} u$, e obtemos

$$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{senh} \left(\frac{1}{3} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{3}{p}} \right) \right),$$

sendo esta a única raiz real da equação (2) quando $-4p^3 - 27q^2 < 0$ com $p > 0$.

4 Conclusões

Obtivemos neste trabalho soluções de equações polinomiais de grau 3, usando expressões trigonométricas. O objetivo dos autores não é o de tomar para si o crédito destas expressões que já estão divulgadas em textos matemáticos. O objetivo dos autores é o de dar uma demonstração para estas expressões.

É também conhecido que existe um desinteresse cada vez maior pela trigonometria e pelas funções trigonométricas por parte dos alunos de ensino médio e superior. Acreditamos que quanto mais pudermos falar a respeito das funções trigonométricas e mostrar suas relações com outros ramos da matemática, podemos despertar a curiosidade ou o interesse do aluno por esta classe de funções.

Referências

Biazzi, Ricardo Neves. *Polinômios irredutíveis: critérios e aplicações.* 74 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/108811>.

Lima, Elisangela D. de & Guzzo, Sandro M. *Solubilidade por meio de radicais de equações polinomiais de grau menor ou igual a quatro.* Mathematica - Revista Eletrônica de divulgação matemática. **V. 1 (2021)** pp 39-49.

Guzzo, Sandro M. *As funções trigonométricas circulares e hiperbólicas.* Editora Moan: Cascavel, 2021.